Ejercicios (Límites de funciones y continuidad)

5.1. Hallar los límites siguientes, si existen. Utilizar la definición de límite para justificar la respuesta.

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x+1)$, b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2-1}$, d) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{(x-1)(x-2)}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+|x|}{x}$, g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\dfrac{1}{x}+\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}+sen\dfrac{1}{|x|}\right)$,

h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x^2+x-2}$, i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x-2}}$.

5.2. Calcular los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{\log x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x+2}{e^{x+5}}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5\log x}{\sqrt{x^4+1}}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\log x)^3}{e^x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{e^x+4}\right)^x$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi}{x\operatorname{cotan}\frac{\pi x}{2}}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}$ $(a>0)$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1}$ j) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

k) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$ l) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^p-1}{x^q-1}$ $(q\neq 0)$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$ $(a,b,c,d>0)$ n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\operatorname{sen}x}}{x-\operatorname{sen}x}$

ñ) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$ o) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{x^x}$ p) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$

q) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}{3}\right)^x$ $(a,b,c>0)$ r) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\operatorname{sen}x-1}{\log(1+x)}$

s) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\operatorname{sen}2x-2\operatorname{sen}x)^4}{(3+\cos 2x-4\cos x)^3}$ t) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sec^2 x-2\tan x}{1+\cos 4x}$

u) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\tan 2x\operatorname{cotan}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$ v) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\operatorname{sen}(x-\pi/6)}{\sqrt{3}-2\cos x}$

w) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{2-ax}\right)^{\sec^2\frac{\pi}{2-bx}}$ $(b\neq 0)$ x) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\operatorname{sen}(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$

y) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\operatorname{sen}x)^2}}$

5.3. Demostrar que los siguientes límites no existen:

a) $\lim_{x\to\infty} \cos x$ b) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$ c) $\lim_{x\to 0} e^{1/\operatorname{sen} x}$

5.4. Hallar los siguientes límites laterales, si es que existen:

a) $\lim_{x\to 2^\pm} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \neq 2, \\ 0, & \text{si } x = 2. \end{cases}$

b) $\lim_{x\to 1^\pm} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} -2x+3, & \text{si } x \geqslant 1, \\ 3x-5, & \text{si } x < 1 \end{cases}$

c) $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ d) $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}$ e) $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|}{x^2+x}$

f) $\lim_{x\to 1^\pm} \frac{x^2-1}{|x-1|}$ g) $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{2-2^{1/x}}$ h) $\lim_{x\to 1^\pm} (x-1)e^{x/(x-1)}$

i) $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{e^{1/x}+1}$ j) $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{e^{1/x}+1}$ k) $\lim_{x\to 0^\pm} e^{1/x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

l) $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{e^{1/x}}{e^{1/x}-1}$ m) $\lim_{x\to 2^\pm} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ n) $\lim_{x\to 2^\pm} \frac{x^2+x+6}{x^2-4}$

5.5. Calcular el límite cuando x tiende a 1 de la función

$$\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)\cdots(\sqrt[p]{x}-1)}{(x-1)^{p-1}}.$$

Indicación: Expresar esta función como producto de $p-1$ factores.

5.6. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \operatorname{sen} x \leqslant 0, \\ 1/e & \text{si } \cos 2x = 0, \operatorname{sen} x > 0 \\ (2\operatorname{sen} x)^{1/\cos 2x} & \text{en otro caso,} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2(1+e^{-1/x})^{-1} & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0, \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + |x|(1+x)}{x} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0, \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$

5.7. Para cada una de las funciones que siguen, hallar todos los puntos de continuidad.

a) $\sqrt{1-x^2}$, b) $\operatorname{sen} e^{-x^2}$, c) $\log(1+\operatorname{sen} x)$, d) $e^{-1//1-2x)}$,
e) $\operatorname{sen} \dfrac{1}{(x-1)^2}$, f) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$, g) $(1-\operatorname{sen}^2 x)^{-1/2}$, h) $\operatorname{cotan}(1-e^{-x^2})$,
i) $\cos \dfrac{1}{x}$.

5.8. Determínese $c > 0$ para que sea continua la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 - \sqrt{c}x, & x \leqslant c, \\ \frac{x-c}{\sqrt{x}-\sqrt{c}}, & x > c, \end{cases}$$

5.9. a) Hállese una función definida en $\mathbb{R}$ que sea discontinua en $\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \}$, pero continua en los demás puntos.

b) Hállese una función definida en $\mathbb{R}$ que sea discontinua en $\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \} \cup \{ 0 \}$, pero continua en los demás puntos.

5.10. Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea discontinua en cualquier punto de $\mathbb{R}$, pero tal que la función $|f|$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

5.11. Sean f y g continuas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, y supóngase que $f(r) = g(r)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. ¿Es cierto que $f = g$?

5.12. Supongamos que f está definida en todo $\mathbb{R}$ y que tiene las dos siguientes propiedades:

A) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$,

B) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ si $x, y \in \mathbb{R}$.

Probar que

a) f es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) $f(rx) = \big(f(x)\big)^r$ si $r \in \mathbb{Q}$. En particular, $f(r) = \big(f(1)\big)^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

d) Si $f(1) = 1$ entonces f es constante.

e) Si $f(1) > 1$ entonces f es estrictamente creciente, y además

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

f) Si $f(1) < 1$ entonces f es estrictamente decreciente, y además

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$$

(Obsérvese que las funciones exponenciales a^x verifican estas propiedades. Este ejercicio, junto con el ejercicio 5.11, nos sugiere un método para definir las exponenciales en todo $\mathbb{R}$.)

5.13. Para cada una de las siguientes funciones polinómicas, hallar un entero n tal que $f(x) = 0$ para algún x comprendido entre n y $n+1$:

a) $f(x) = x^3 - x + 3$

b) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

c) $f(x) = x^5 + x + 1$

5.14. Demostrar:

a) La ecuación $x2^x = 1$ tiene al menos una solución positiva no mayor que 1.

b) La ecuación
$$x^{179} + \frac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 119$$
tiene al menos una solución real.

c) La ecuación $\operatorname{sen} x = x - 1$ tiene al menos una solución real.

d) La ecuación $\frac{\pi}{2} - x - \operatorname{sen} x = 0$ posee solución en $[0, \frac{\pi}{2}]$.

e) La ecuación $x \operatorname{sen} x - \frac{\pi}{4} = 0$ poesee al menos dos soluciones en $[0, \pi]$.

5.15. Sea d una dirección en el plano y T un triángulo. Probar que existe una recta con dirección d de modo que divide al triángulo en dos partes de igual área.

5.16. Un coche recorre 100 kilómetros en 50 minutos sin detenerse. Demostrar que hubo un minuto en el cual recorrió exactamente 2 kilómetros.

5.17. Sea f continua del intervalo $[0, 1]$ a $\mathbb{R}$, tal que $f(0) = f(1)$. Demostrar que existe un punto $c \in [0, \frac{1}{2}]$ en el que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$ (*Indicación:* Considérese $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$). Concluir que existen, en cualquier momento, puntos opuestos en el ecuador terrestre que tienen la misma temperatura.

5.18 (Teorema del Punto Fijo de Brouwer)**.** Sea I un intervalo cerrado y acotado. Pruébese que si una función $f : I \to I$ es continua, entonces existe un punto $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) = x_0$.

5.19. Sea I un intervalo. Pruébese que si una función $f : I \to \mathbb{R}$ es continua y $t_1, t_2, \ldots, t_n \in I$, entonces existe un punto $c \in I$ tal que $f(c) = \frac{f(t_1)+f(t_2)+\cdots+f(t_n)}{n}$.

5.20. Sea f definida y acotada en un intervalo cerrado y acotado $I \subset \mathbb{R}$. Si $S \subset I$, el número

$$\omega_f(S) = \sup\{\, f(x) - f(y) \mid x, y \in S \,\}$$

se llama *oscilación* de f en S. Si $x \in I$, la oscilación de f en x se define como el número

$$\omega_f(x) = \lim_{h \to 0^+} \omega_f((x - h, x + h) \cap I).$$

Probar que este límite existe siempre y que $\omega_f(x) = 0$ si, y solo si, f es continua en x.

5.21. Supóngase que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Demostrar que f está acotada, y que alcanza un máximo o un mínimo. Dar un ejemplo para indicar que no necesariamente se tienen por qué alcanzar tanto un máximo como un mínimo.

5.22. Ver cuáles de las siguientes funciones son uniformemente continuas:

a) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, \infty)$, b) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1)$,
c) $f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$, d) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0$,
e) $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$, f) $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 1$,
g) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad x > 0$, h) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad x > 1$,
i) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in (-1, 1)$, j) $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1)$.